

Exercice 1 (5 points)

1) Soit dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $z^3 + 2(1-i)z^2 - 2(1+4i)z + 4(-2+i) = 0$.

a) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $(z+1)^2 = (2+i)^2$.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 + 2(1-i)z^2 - 2(1+4i)z + 4(-2+i) = (z-2i)[(z+1)^2 - (2+i)^2]$$

c) Résoudre alors l'équation (E).

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2i$, $1+i$ et $-3-i$.

a) Soit \mathcal{C} le cercle de diamètre [BC]. Déterminer son centre I et son rayon r.

b) Montrer que $A \in \mathcal{C}$.

c) Donner la nature du triangle ABC. Justifier votre réponse.

d) Placer les points A, B et C et construire le cercle \mathcal{C} .

Exercice 2 (5 points)

1) Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{2}$.

a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq \sqrt{2}$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{2} - u_n)(\sqrt{2} + u_n)}{2u_n}$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

e) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite réelle ℓ .

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$.

Montrer que $f(\ell) = \ell$ et déterminer ℓ .

3) Vérifier, à l'aide d'une calculatrice, que u_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

