REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ※※※※ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 3 H Coefficient : 3
Section : Sciences de l'informatique	**Session principale**

Exercice 1 (5 points)

1) Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i)=0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z+1)^2 = (2+i)^2$.

b) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i)=(z-2i)\left[(z+1)^2-(2+i)^2\right]$$

c) Résoudre alors l'équation (E).

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2i$, $1+i$ et $-3-i$.

a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [BC]. Déterminer son centre I et son rayon r.

b) Montrer que $A\in\mathscr{C}$.

c) Donner la nature du triangle ABC. Justifier votre réponse.

d) Placer les points A, B et C et construire le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 2 (5 points)

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{u_n}{2}$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2\,u_n}$.

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\geq\sqrt{2}$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(\sqrt{2}-u_n)(\sqrt{2}+u_n)}{2\,u_n}$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

e) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite réelle ℓ.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}$.

Montrer que $f(\ell)=\ell$ et déterminer ℓ.

3) Vérifier, à l'aide d'une calculatrice, que u_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + (1-2x)\ln x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) En écrivant $f(x) = x\left(1 + \frac{1-2x}{x}\ln x\right)$ pour $x > 0$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1-x}{x} - 2\ln x$.

b) Calculer $f'(1)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $\frac{1-x}{x} > 0$ et $-2\ln x > 0$ et en déduire le signe de f' sur $]0,1[$.

d) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\frac{1-x}{x} < 0$ et $-2\ln x < 0$ et en déduire le signe de f' sur $]1,+\infty[$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

b) Calculer $f(2)$. Tracer Δ et $(\mathscr{C})$.

4) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite Δ.

a) Montrer que la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = (x^2 - x)(1 - \ln x)$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 4 (4 points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $5x + 3y = 60$.

a) Vérifier que $(2,-3)$ est une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation (E') : $5x + 3y = 1$. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est $S = \{(-3k+120, 5k-180) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

c) En déduire tous les couples d'entiers naturels non nuls solutions de (E).

2) Le directeur d'un lycée veut acheter x ordinateurs et y imprimantes pour un montant total de 6000 dinars. On sait que le prix d'un ordinateur est de 500 dinars et celui d'une imprimante est de 300 dinars et qu'il désire acheter plus d'ordinateurs que d'imprimantes.

a) Vérifier que $5x + 3y = 60$.

b) Déterminer alors le nombre d'ordinateurs et le nombre d'imprimantes qu'il peut acheter.