2) Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x)=e^x\sqrt{1-x^2}-1$.

On donne ci-contre le tableau de variation de g .

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\searrow$	-1

a) Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une solution unique α.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,1]$.

3) On se propose de déterminer la position relative de (C_f) et de sa tangente (T) au point d'abscisse 0 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction h définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=e^{\sin x}-(x+1)$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h'(x)=g(\sin x)$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel β dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta=\alpha$.

c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalles $[0,\beta]$ et $\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

e) En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)\geq x+1$. Conclure.

II

1) a) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$, $\sin x\leq x$.

b) Déduire alors que pour tout réel $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)\leq e^x$.

c) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de la fonction $x\mapsto e^x$.

Tracer la droite (T) et la courbe (C_f).

2) a) Montrer que $\int_0^1 f(x)dx\leq e-1$ et que $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\leq e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$. Montrer que $\frac{\pi^2}{4}+\pi\leq A\leq e\pi-2$.